假如一只青蛙不慎掉进一口深井里，求青蛙在井底与井口重量之比。

2017年2月27日

目录

1 典型计算

假设青蛙质量为m, 井深度为h, 地球半径为R(井口到地球中心距离), 地球质量为M, 引力常数为G.

青蛙在井口重量

$$GMm/R^2$$

在井底时青蛙重量只与半径在 $R-h$以内的这部分地球质量有关，设为M_1，则

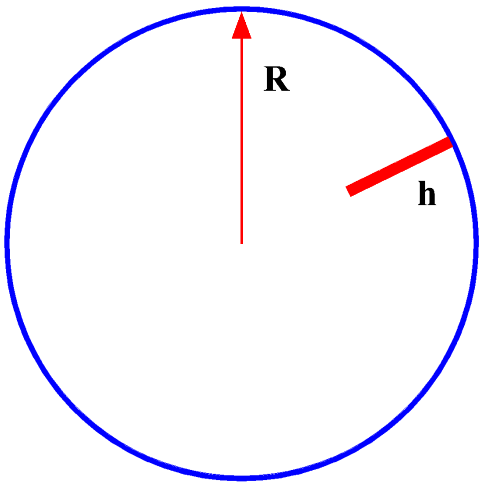
$$M_1 = M(R-h)^3/R^3$$

青蛙在井底重量

$$GM_1m/(R-h)^2 = GMm(R-h)/R^3$$

井底重量与井口重量之比

$$(R-h)/R$$



2 进一步思考

以上假定是在地球质量均匀分布下计算的，且地球表面除了这口井之外是光滑球面，当然这不完全符合实际。假如地球质量密度分布不均匀，但在距离地心相同距离处密度相同，或者说地球是一层层球壳组成，不同半径的球壳密度可以不同，但同一球壳的质量均匀分布，这时结论仍然成立，即在井底青蛙重量较轻。

关键一点是球壳对球壳内的青蛙没有引力，而球壳对球壳之外的青蛙引力相当于全部球壳质量集中于球心处。

2.1 球壳对球壳内的质点引力合力为零

为计算引力，地球可看成一个个球壳嵌套组成，这里假定每个球壳的质量分布是均匀的，厚度极薄。

- 对于球壳表面一个微小的局部可看成欧几里得几何平面，就像地面上的一个池塘水面可看成平面，因此球壳表面可划分成无数个小的三角形，全部小三角形面积相加即是球壳表面积，由于球壳厚度均匀，小三角形质量比等于面积比。
- 相似三角形的边长平方比等于面积比。
- 设想一条直线通过球壳内任意一点，直线在球壳表面必相交于2点，当球壳内的点固定，稍微转动直线则在球壳上的交点移动轨迹构成相似图形，比如微小的相似三角形。
- 每个三角形所在的球壳表面这部分近似平面，为便于计算三角形边长可在此平面选择相互垂直的2个坐标轴(局部正交坐标轴)，下面按此思路实现。

2.1.1 截图与垂直截图平面分量

- A点是球壳内任意一点，过A点的任意直线与球壳相交于B、D，过球壳球心C与直线BD的平面将球壳截成两半，附图是截图平面。蓝色圆是球壳，圆心C，OB，OD是切线；红、绿色圆以A点为圆心，分别以AB和AD为半径。
- 球壳上B点附近任意微小线段可分解成此截图平面上B在切线上的分量BE'和垂直此截图平面分量(可看成绕CA轴转动)；类似有D点附近的DF'及相应的垂直此截图平面分量。垂直分量与B、D到AC的垂直距离成正比，显然与AB、AD成正比。

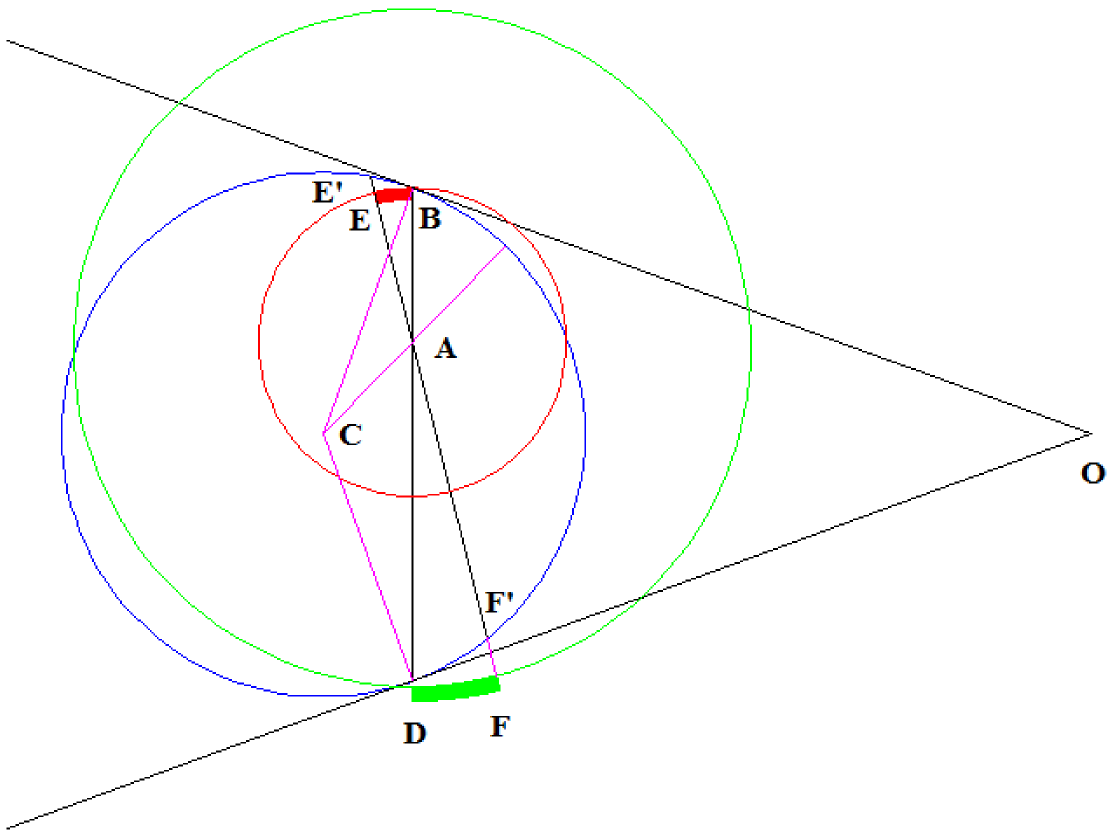
2.1.2 截图平面分量计算

下面证明此截图平面上的分量之比

$$BE' : DF' = AB : AD$$

显然有(注意这里BE, BE', DF, DF'都是微小线段，或者说是任意小)

$$BE = BE' * Cos(\angle BOD/2)$$
$$DF = DF' * Cos(\angle BOD/2)$$
$$\triangle ABE \sim \triangle ADF$$



因此 $BE' : DF' = AB : AD$成立 (由于任意小 BE'和DF' 可认为在切线上)

这里BE'是球壳上B点附近任意微小线段在截图平面分量，
DF'是与BE'相对应的D点附近微小线段在截图平面分量。

考虑到垂直截图分量比(参考 §2.1.1)同样 $= AB : AD$

因此三角形边长比$= AB : AD$,

面积比或者质量比$= AB^2 : AD^2$

根据牛顿引力与距离平方反比公式，B、D附近2相似三角形对A点处质点引力抵消，合力为零。

由于B、D点的任意性，球壳上全部三角形都可以这样成对考虑，从而对A处质点合力为零。

由于A点的任意性，球壳对球壳内的任意质点无引力。

2.2 球壳对球壳外的质点引力等价于球壳质量位于球心

未完待续